

پاسخنامه تشریحی

۱

الف درست

۲

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$
د	د	د	ن	د
د	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	د
ن	ن	د	د	د

۳

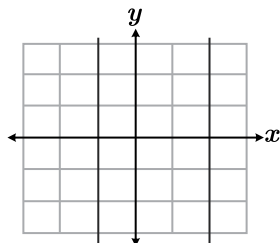
$$\forall n \in \mathbb{N}; n < n^2$$

ارزش گزاره نادرست است. زیرا به ازای $n = 1$ عبارت $1 < 1^2$ برقرار نیست.

۴

$$(A - B) \cup (A \cap B) = (A \cap B') \cup (A \cap B) = A \cap (B' \cup B) = A \cap U = A$$

۵



۶

(هر عدد طبیعی، زوج یا فرد است.) \rightarrow درست $(x \in \underbrace{E}_{\text{مجموعه زوج}}) \vee (x \in \underbrace{O}_{\text{مجموعه فرد}})$ الف

(مربع هر عدد حسابی، نامنفی است.) \rightarrow نادرست $a^2 < 0 \rightarrow \exists a \in \mathbb{W}$ ب

نادرست (عدد ۲ زوج است) $\forall x \in P; x \in O \rightarrow$ پ

($1 - 2x > 5 \Leftrightarrow x < -2$) \rightarrow نادرست $\exists x \in \mathbb{N}; 1 - 2x > 5 \rightarrow$ ت

نادرست (اگر $x = -1$) $x + \frac{1}{x} \geq 2$ $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ ث

درست ($x = 1$) $x^3 = x$ $\exists x \in \mathbb{R};$ ج

الف $T \wedge F \equiv F$ ۷

ب $T \vee F \equiv T$

پ $F \vee F \equiv F$

ت $F \Rightarrow F \equiv T$

ث $F \Leftrightarrow F \equiv T$

ج $F \Leftrightarrow F \equiv T$

چ $T \Leftrightarrow T \equiv T$

۸

گزارهٔ p	گزارهٔ q	ارزش p	ارزش q	ارزش $(p \Rightarrow q)$	ارزش $p \wedge q$
عدد ۲ زوج است	۳ عددی اول است	د	د	د	د
۴ مربع کامل است	۱ \neq ۲	د	ن	ن	ن
$۲ \in \{۱, ۲\}$	$۰ \in \mathbb{N}$	د	ن	ن	ن
۵ مرکب است	عدد ۷ اول است	ن	د	د	ن

۹ به روش عضوگیری اثبات می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad x \in (A \cap B) &\Leftrightarrow \underbrace{x \in A \wedge x \in B}_{\text{جابه‌جایی}} \Leftrightarrow x \in B \wedge x \in A \\ &\Leftrightarrow x \in (B \cap A) \Leftrightarrow A \cap B = B \cap A \\ \text{ب)} \quad x \in (A \cap (B \cap C)) &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in (B \cap C) \Leftrightarrow \underbrace{((x \in A) \wedge (x \in B) \wedge (x \in C))}_{\text{جابه‌جایی}} \\ &\Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \in B)) \wedge (x \in C) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \wedge (x \in C) \Leftrightarrow x \in ((A \cap B) \cap C) \\ \text{پ)} \quad x \in (A \cap (B \cup C)) &\Leftrightarrow \underbrace{(x \in A) \wedge ((x \in B) \vee (x \in C))}_{\text{توزیع‌پذیری}} \\ &\Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \in B)) \vee ((x \in A) \wedge (x \in C)) \Leftrightarrow (x \in (A \cap B)) \vee (x \in (A \cap C)) \\ &\Leftrightarrow x \in ((A \cap B) \cup (A \cap C)) \end{aligned}$$

۱۰ اگر ثابت کنیم $(A - B) \cup A = A$ ، یعنی ثابت کرده‌ایم: $A - B \subseteq A$.

$$(A - B) \cup A = \underbrace{(A \cap B') \cup A}_{\text{قانون جذب}} = A \Rightarrow A - B \subseteq A$$

۱۱

$$\forall x; x \in (A \cup C) \Rightarrow x \in A \vee x \in C \xrightarrow[\substack{A \subseteq B \\ C \subseteq D}]{\substack{A \subseteq B \\ C \subseteq D}} x \in B \vee x \in D \Rightarrow x \in (B \cup D)$$

بنابراین $A \cup C \subseteq B \cup D$

$$12 \quad \text{الف)} \quad D_x = \{m^r | m \in \mathbb{W}\}$$

$$\text{ب)} \quad D_a = \{5k + 1 | k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\text{پ)} \quad D_x = \{x | x \in \mathbb{R}, x \leq -2\}$$

$$\text{ث)} \quad D_n = \{0\}$$

۱۳

$$\text{الف)} \quad \begin{cases} A \subseteq X \\ A' \subseteq X \end{cases} \Rightarrow A \cup A' \subseteq X \Rightarrow \begin{cases} U \subseteq X \\ X \subseteq U \end{cases} \Rightarrow U = X$$

درست است.

$$\text{ب)} \quad (A - B) \cup (A \cap B) = \underbrace{(A \cap B') \cup (A \cap B)}_{\text{توزیع‌پذیری}} = A \cap \underbrace{(B \cup B')}_{\text{توزیع‌پذیری}} = A$$

درست است.

$$\begin{aligned} \text{پ)} \quad (A \cap B) - C &= (A - C) \cap (B - C) \xrightarrow{\text{از سمت چپ به راست}} \\ (A - C) \cap (B - C) &= \underbrace{(A \cap C') \cap (B \cap C')}_{\text{شرکت‌پذیری}} = (A \cap B) \cap C' = (A \cap B) - C \end{aligned}$$

درست است.

$$\begin{aligned} \text{ت)} \quad (A - B) \cup (B - A) &= (A \cup B) - (A \cap B) \\ \underbrace{(A \cap B') \cup (B \cap A')}_{\text{توزیع‌پذیری}} &= \underbrace{[(A \cap B') \cup B]}_{A \cup B} \cap \underbrace{[(A \cap B') \cup A']}_{B' \cup A'} \\ &= (A \cup B) \cap (B' \cup A') = A \cup B - (B' \cup A')' = (A \cup B) - (A \cap B) \end{aligned}$$

درست است.

$$\begin{aligned} \text{ث)} \quad \underbrace{(A \cup B) \cap (A' \cap B')}_{\text{شرکت‌پذیری}} &= \underbrace{[(A \cup B) \cap A']}_{\text{توزیع‌پذیری}} \cap B' = \underbrace{[(A' \cap A) \cup (A' \cap B)]}_{\emptyset} \cap B' \\ &= \underbrace{A' \cap B}_{\emptyset} \end{aligned}$$

$$= \underbrace{(A' \cap B) \cap B'}_{\text{شرکت‌پذیری}} = \underbrace{(B' \cap B)}_{\emptyset} \cap A' = \emptyset$$

درست است.

ج) نادرست است زیرا اگر $A = B = \emptyset$ و $C = \{1\}$ در نظر بگیریم در شرایط صدق می‌کند اما $B \neq C$ می‌باشد.

۱۴ گزینه ۴

$$\text{الف)} (r \Rightarrow q) \wedge (p \vee \sim q) \equiv (F \Rightarrow T) \wedge (T \vee F) \equiv T \wedge T \equiv T$$

$$\text{ب)} (p \Rightarrow \sim q) \Leftrightarrow (r \wedge p) \equiv (T \Rightarrow F) \Leftrightarrow (F \wedge T) \equiv F \Leftrightarrow F \equiv T$$

$$\text{ج)} [p \Rightarrow (r \Rightarrow \sim q)] \vee (p \wedge q) \equiv [T \Rightarrow (F \Rightarrow F)] \vee (T \wedge T) \equiv (T \Rightarrow T) \vee T \equiv T \vee T \equiv T$$

هر سه گزاره درست هستند.

۱۵ گزینه ۲

$$A \times B \subseteq B \times A \rightarrow \begin{cases} A \subseteq B \\ B \subseteq A \end{cases} \Rightarrow A = B$$

مجموعه A ، ۴ عضوی است، بنابراین:

$$|x| \neq x \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow x \leq 0$$

بنابراین:

$$\{-x, x, -1, 2\} = \{2, -5, -y, y + 4\} \Rightarrow \{-x, x, -1\} = \{-5, -y, y + 4\} \xrightarrow{x \leq 0} x = -5, -x = 5 \rightarrow \{5, -5, -1\} = \{-5, -y, y + 4\} \\ \Rightarrow \{5, -1\} = \{-y, y + 4\}$$

حل دو دستگاه معادله‌ای که تشکیل می‌شود را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} -y = 5 \Rightarrow y = -5 \\ y + 4 = -1 \Rightarrow y = -5 \end{cases} \Rightarrow x + y = -5 - 5 = -10$$

در نتیجه:

$$\begin{cases} -y = -1 \Rightarrow y = 1 \\ y + 4 = 5 \Rightarrow y = 1 \end{cases} \Rightarrow x + y = -5 + 1 = -4$$

بنابراین: $(x + y)_{\max} = -4$

۱۶ گزینه ۱

$$n(A^r - A \times B) = 3n(A \times B - B^r) \Rightarrow n(A \times (A - B)) = 3n((A - B) \times B) \quad n(A)n(A - B) = 3n(A - B)n(B) \Rightarrow n(A) = 3n(B)$$

بنابراین:

$$\begin{cases} n(A) = 3n(B) \\ n(A) = 10 + n(B) \end{cases} \Rightarrow n(A) = 15, n(B) = 5$$

از طرفی:

$$n(A^r - B^r) = 225 \Rightarrow n(A^r) - n(A^r \cap B^r) = 225 \\ \Rightarrow 225 - n(A^r \cap B^r) = 225 \Rightarrow n(A^r \cap B^r) = 0$$

بنابراین:

$$n((A \times B) \cap (B \times A)) = n[(A \cap B)^r] = n(A^r \cap B^r) = 0$$

۱۷ گزینه ۲ ابتدا تعداد حالت‌های ایجاد زیرمجموعه A را می‌شماریم. با ساخت هر زیرمجموعه‌ای مثل A مابقی اعضاها را در B قرار می‌دهیم. از طرفی اعداد ۱ تا ۴ هرکدام می‌توانند در A باشند یا نباشند، اما عدد ۵ تنها یک حالت خواهد داشت، زیرا اگر مجموع اعضا زوج باشد، آنگاه عدد ۵ نباید در آنها باشد و اگر فرد باشد، باید حتماً در آنها باشد، پس کل حالت‌ها برابر است با $2^4 = 16$

۱۸ گزینه ۱ بهترین راه آن است که گزینه‌ها را تک‌به‌تک ساده کرده و بررسی کنیم. در گزینه ۱، داریم:

$$q \Rightarrow (p \vee r) \Rightarrow ((p \vee \sim p) \wedge (\sim q \wedge r)) \equiv (\sim q \vee p \vee r) \Rightarrow (3q \wedge r)$$

همواره درست

این گزاره شرطی در ۲ حالت درست است:

$$\text{الف)} p \vee \sim q \vee r \equiv F \Rightarrow \begin{array}{c|c|c} p & q & r \\ \hline F & T & F \end{array}$$

$$\text{ب)} \sim q \wedge r \equiv T \Rightarrow \begin{array}{c|c|c} p & q & r \\ \hline T & F & T \\ \hline F & F & T \end{array}$$

که از شانس خوب ما (!)، در جدول داده‌شده، عبارت x هم فقط به‌ازای این ۲ حالت (که ۳ ردیف را شامل می‌شود) درست است و در نتیجه گزینه (۱) درست است و نیازی به بررسی سایر گزینه‌ها نیست.

۱۹ گزینه ۱ کافی است هر یک از گزاره‌ها را به زبان فارسی ترجمه کرده و معادل $p \Rightarrow q$ را به صورت $p \vee q \sim$ تجسم کنید.

گزاره ۱: برای هر x وجود دارد y که $۱۲ \neq ۳x + y$ یا $۳ - ۴x = y$. در این حالت $۱۲ \neq ۳x + y$ ارزش درست پیدا کرده و کل گزاره درست می‌شود.

گزاره ۲: برای هر x وجود دارد y که هم $۱۲ = ۳x + y$ و هم $۳ - ۴x = y$ که مثلاً برای $x = ۱$ چنین y وجود ندارد.

گزاره ۳: وجود دارد x که هر y را در نظر بگیریم $۱۲ \neq ۳x + y$ یا $۳ - ۴x = y$ که هر دو عبارت غلط بوده و کل گزاره غلط می‌شود.

گزاره ۴: وجود دارد x که هر y را در نظر بگیریم هم تساوی $۱۲ = ۳x + y$ برقرار باشد و هم تساوی $۳ - ۴x = y$ که چنین x وجود ندارد.

۲۰ گزینه ۴